|  |
| --- |
|  |
| Schule |
|  |
| Klasse |
|  |
| Tischnummer |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Station  „USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?“  Teil 3  Arbeitsheft   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  |  | | Teilnehmercode | | | | | | | | |

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Im 3. Teil der Station präsentieren die beiden Landvermesser Liam und Noah eine neue Möglichkeit der Landvermessung. Dabei stellen sie die gesamten Ergebnisse ihrer Forschung vor. Ihre Erkenntnisse ermöglichen es auf einfachste Art und Weise Flächen zu berechnen.

Wichtig: Bearbeiten Sie bitte alle Aufgaben der Reihe nach!



|  |  |
| --- | --- |
|  | Zu dieser Aufgabe gibt es Hilfen im Hilfeheft. |
|  | Diskutiert hier eure wichtigsten Ergebnisse und fasst sie zusammen. |
|  | Zu dieser Aufgabe gibt es eine Simulation oder ein Video. |
|  | Zu dieser Aufgabe gibt es Material auf eurem Tisch. |

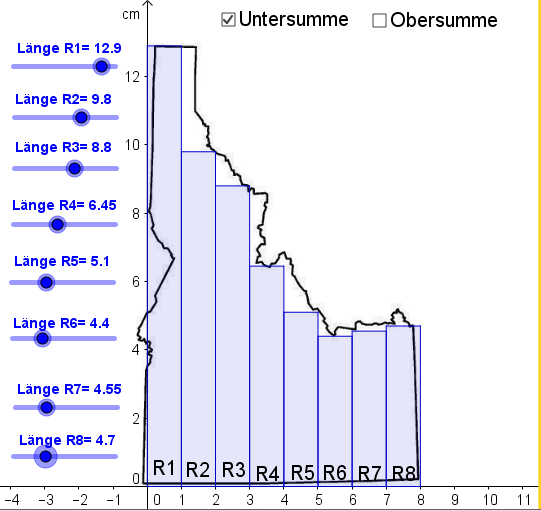
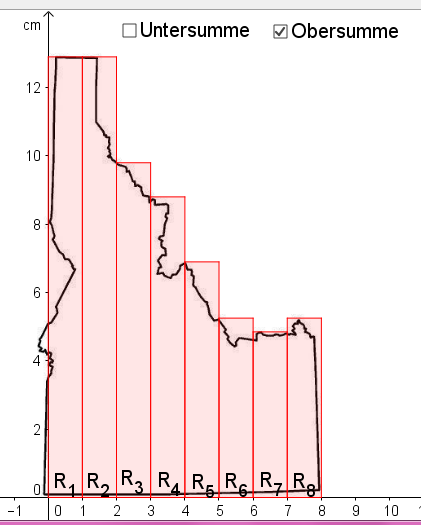
Wir wünschen Ihnen viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team

Nach dem anstrengenden Kongresstag lassen es sich die beiden Landvermesser am nächsten Morgen in ihrem Hotelzimmer so richtig gut gehen und bestellen sich ein riesiges Frühstück. Zusätzlich zu Ihrer Bestellung erhalten Sie die aktuelle Tageszeitung, in der Sie ein kniffliges Quiz über ihr Fachgebiet finden.

7.1 Helfen Sie Landvermesser Liam und Noah die Fragen im Quiz zu beantworten.

**Bemerkung:** Bei manchen Fragen sind mehrere richtige Antworten möglich.

** Frage 1:** Die Abbildungen zeigen links eine Untersumme und rechts eine Obersumme, die beide den Flächeninhalt von Idaho näherungsweise beschreiben.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie an.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Die Obersumme ist immer etwas größer als der eigentliche Flächeninhalt. | **V** |
|  | Die Obersumme ist immer etwas kleiner als der eigentliche Flächeninhalt. | **I** |
|  | Die Untersumme ist immer etwas größer als der eigentliche Flächeninhalt. | **A** |
|  | Die Untersumme ist immer etwas kleiner als der eigentliche Flächeninhalt. | **E** |

**Frage 2:** Wie verhalten sich Ober- und Untersumme, wenn man die Anzahl der Streifen variiert?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Obersumme immer größer und bleibt auch insgesamt größer als der eigentliche Flächeninhalt. | **N** |
|  | Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Untersumme immer größer und bleibt aber insgesamt kleiner als der eigentliche Flächeninhalt. | **R** |
|  | Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Obersumme immer kleiner und bleibt aber insgesamt größer als der eigentliche Flächeninhalt. | **L** |
|  | Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Untersumme immer kleiner und bleibt auch insgesamt kleinerer als der eigentliche Flächeninhalt. | **M** |

**Frage 3:** Wie stehen Ober- und Untersumme zueinander, wenn man die Anzahl der Streifen möglichst groß werden lässt.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Ober- und Untersumme nähern sich einem beliebigen Wert an. | **T** |
|  | Ober- und Untersumme nähern sich dem eigentlichen Flächeninhalt an. | **E** |
|  | Ober- und Untersumme weichen stärker voneinander ab. | **R** |
|  | Ober- und Untersumme entfernen sich vom eigentlichen Flächeninhalt. | **A** |

**Frage 4:** Wie kann der Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x‑Achse gedeutet werden?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Ableitungsfunktion | **S** |
|  | Randfunktion | **G** |
|  | Stammfunktion | **I** |
|  | Parabel | **K** |

**Frage 5:** Vervollständigen Sie die folgende Definition der Stammfunktion. Sei f eine auf dem Intervall definierte Funktion. Dann heißt die Funktion F Stammfunktion von f im Intervall , wenn gilt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | **H** |
|  |  | **R** |
|  | Die Ableitung der Stammfunktion F(x) ergibt die Funktion f(x). | **U** |
|  | Die Ableitung der Funktion f(x) ergibt die Stammfunktion F(x). | **R** |

**Frage 6:** Was ist eine Stammfunktion von ?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | **A** |
|  |  | **N** |
|  |  | **G** |
|  |  | **L** |

7.2 Reihen Sie nun die Kennbuchstaben der richtigen Aussagen aus Aufgabe 8.1 aneinander.

Es ergibt sich ein Lösungswort.

Das Lösungswort lautet:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Nach dem Frühstück brechen Landvermesser Liam und Noah auf und fliegen zurück nach Idaho. Zu Hause angekommen vertiefen sie sich in ihre Forschung. Nach einem Jahr harter Arbeit entdeckten sie etwas, was andere nie für möglich gehalten haben: das Integral. Ihre Erkenntnis präsentierten Sie auf dem 2. internationalen Kongress:

Noah:„Zu Beginn unserer Forschung haben wir die Fläche unseres Heimatbundesstaat Idaho vermessen. Aufgrund seiner vorteilhaft verlaufenden Staatsgrenzen ist es möglich Idaho geschickt in einem Koordinatensystem zu positionieren, sodass die y‑Achse die westliche und die x-Achse die südliche Grenze des Staates darstellt. Im Nord-Westen von Idaho verläuft die Grenze annähernd wie eine Funktion 2. Grades. Mit Hilfe dieser Erkenntnis konnten wir die Fläche von Idaho gekonnt eingrenzen. Bei der genauen Vermessung von Idaho haben wir festgestellt, dass sich der Flächeninhalt von Idaho durch Ober- und Untersummen beschreiben lässt. Wählt man unendlich viele und dafür schmalere Streifen für die Berechnung von Ober- und Untersumme, so stellt man fest, dass sich diese demselben Grenzwert annähern. Dieser entspricht dem tatsächlichen Flächeninhalt von Idaho.“

|  |
| --- |
| **Definition Integral**  Sei f eine Funktion auf dem Intervall [a; b] und Un die Untersumme bzw. On die Obersumme.  Streben Un und On, wenn , gegen denselben Grenzwert,  so heißt dieser gemeinsame Grenzwert das Integral von f über [a, b]:  (Sprechweise: „Integral von f(x) von a bis b“) |

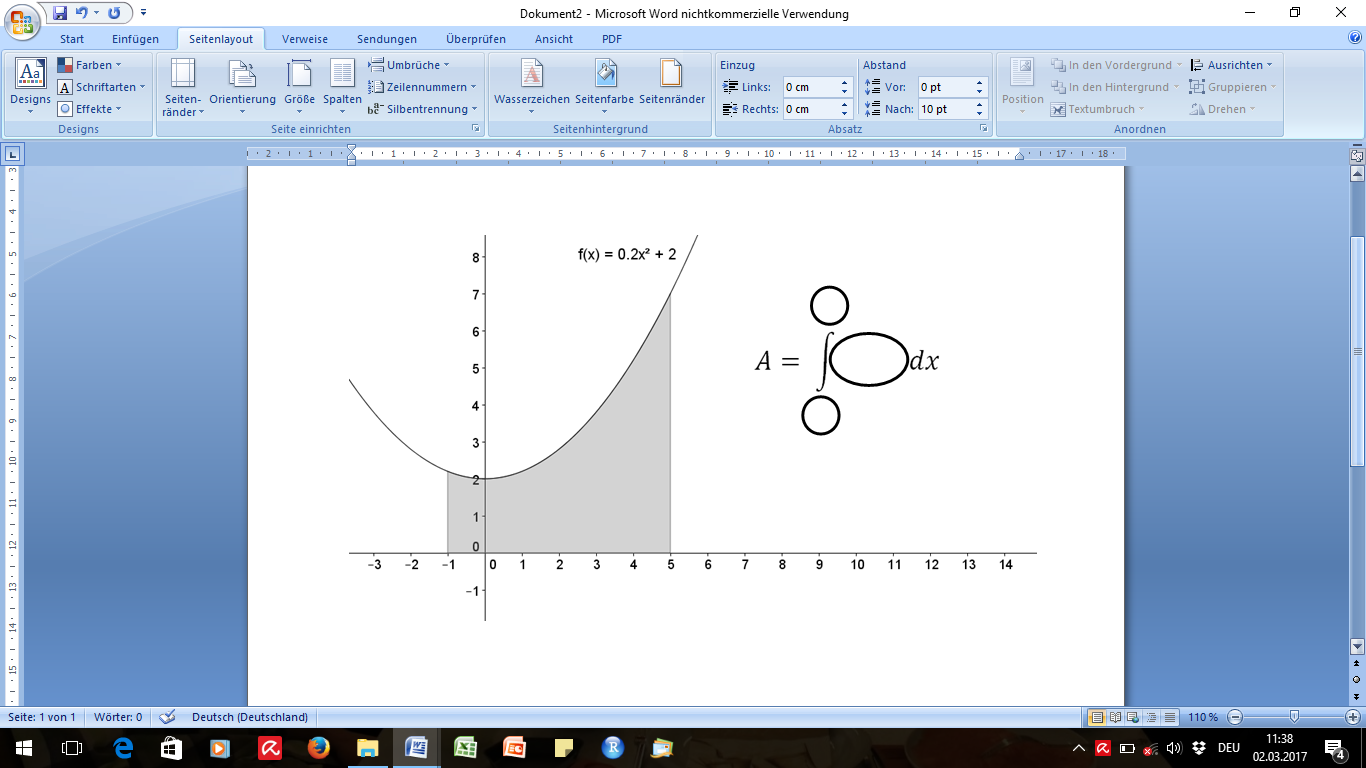
|  |
| --- |
| Das Integralzeichen ∫ ist aus dem S vom lateinischen Wort Summa (deutsch Summe) entstanden; steht für immer kleiner werdende Intervallbreiten.  obere Grenze    Integrationsvariable  untere Grenze  Integrand |

Nach dem 1. Teil des Vortrags haben alle Anwesenden Landvermesser die Gelegenheit Fragen zu stellen und sich mit der Materie zu beschäftigen.

In den folgenden Aufgaben haben Sie die Möglichkeit Integrale aufzustellen und deren Schreibweise zu vertiefen.

|  |  |
| --- | --- |
| Material 1   * Legende   Diese finden Sie ebenfalls im Materialordner der Station. |  |

8.1 Ergänzen Sie das Integral so, dass es den Flächeninhalt unter dem angegebenen Graphen beschreibt.



****8.2 Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgabe einen weiteren Laptop.

Stellen Sie in Partnerarbeit ein Integral auf, mit dem sich der Flächeninhalt von einem Bundesstaat der USA berechnen lässt. Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgabe **Simulation 11**.

Benutzen Sie hierbei die x-Achse als südliche, die Gerade a als westliche, Gerade b als östliche und die Funktion f(x) als nördliche Grenze des Bundesstaates.

Notieren Sie hier Ihr Integral und den dazugehörigen Bundesstaat.



|  |  |
| --- | --- |
| **Bundesstaat** | **Integral** |
|  |  |

****8.3 Teilen Sie dem andren Zweierteam Ihrer Gruppe Ihr aufgestelltes Integral mit. Versuchen Sie herauszufinden, zu welchem Bundestaat das Integral des andren Teams gehört.

Verwenden Sie hierzu auch wieder die **Simulation 11** und notieren Sie ihre Ergebnisse.

|  |
| --- |
|  |

****8.4 Finden Sie zu den angegeben Integralen den jeweils passenden Bundesstaat.Verwenden Sie hierzu **Simulation 11**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Integral** | **Bundesstaat** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

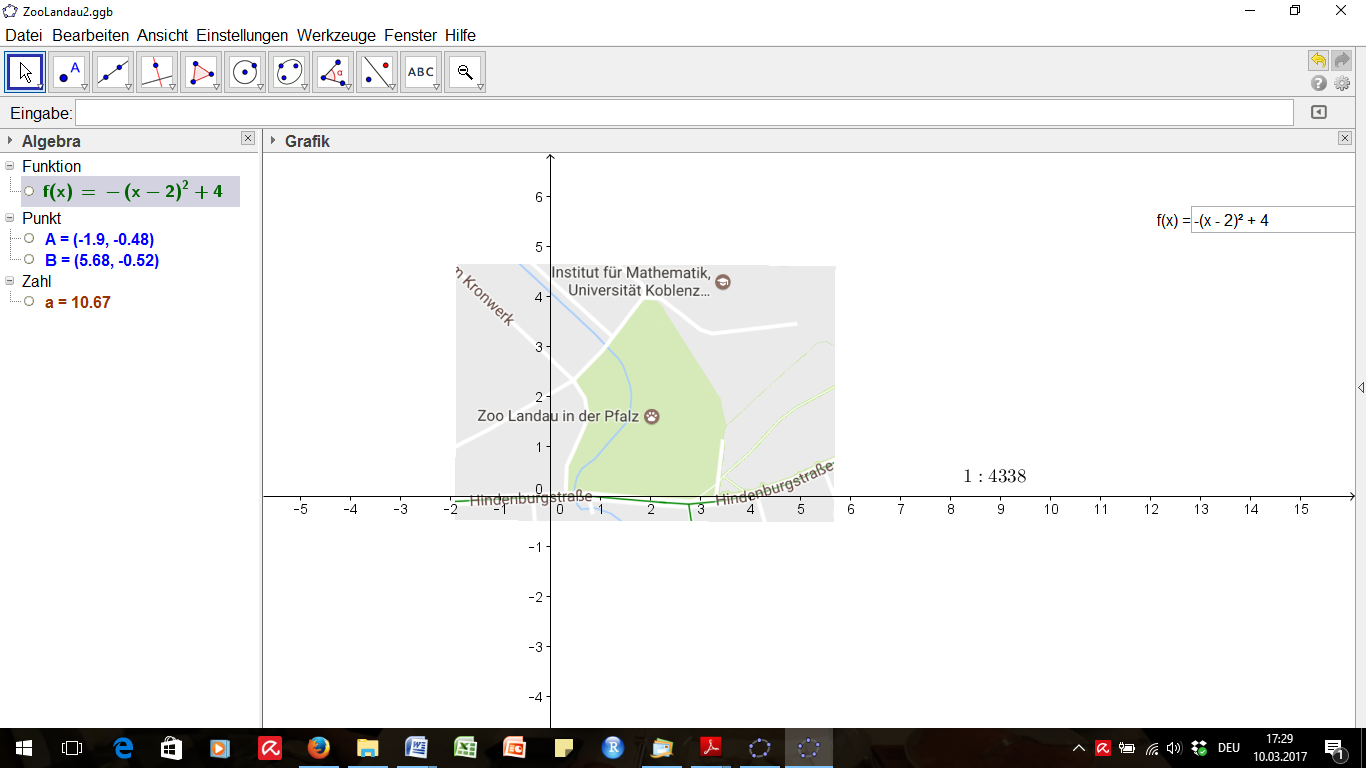
8.5 Geben Sie zu den gegebenen Bundesstaaten ein möglichst genaues Integral an. Die Schwierigkeit nimmt von oben nach unten zu. Verwenden Sie auch hier wieder **Simulation 11**.

Notieren Sie Ihre Integrale in den entsprechenden Feldern!

|  |  |
| --- | --- |
| Bundestaat | Integral |
| Kansas (KS) |  |
| New York (NY) |  |
| New Hampshire (NH) |  |
| Idaho (ID) |  |
| Michigan (MI) |  |
| Virginia (VA) |  |

Liam und Noah werden von einem deutschen Professor der Universität Landau angesprochen. Dieser soll im Rahmen seiner Forschungsarbeit die Fläche des Landauer Zoos vermessen, damit der Zoo die Fläche optimal ausnutzen kann. Dafür benötigt er die Hilfe von Liam und Noah.

9.1. Zeichnen Sie eine geeignete Funktion mit dazugehöriger Ober- und Untersumme in die Karte ein.



9.2. Berechnen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersumme näherungsweise den Flächeninhalt des Zoos Landau in der Pfalz.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

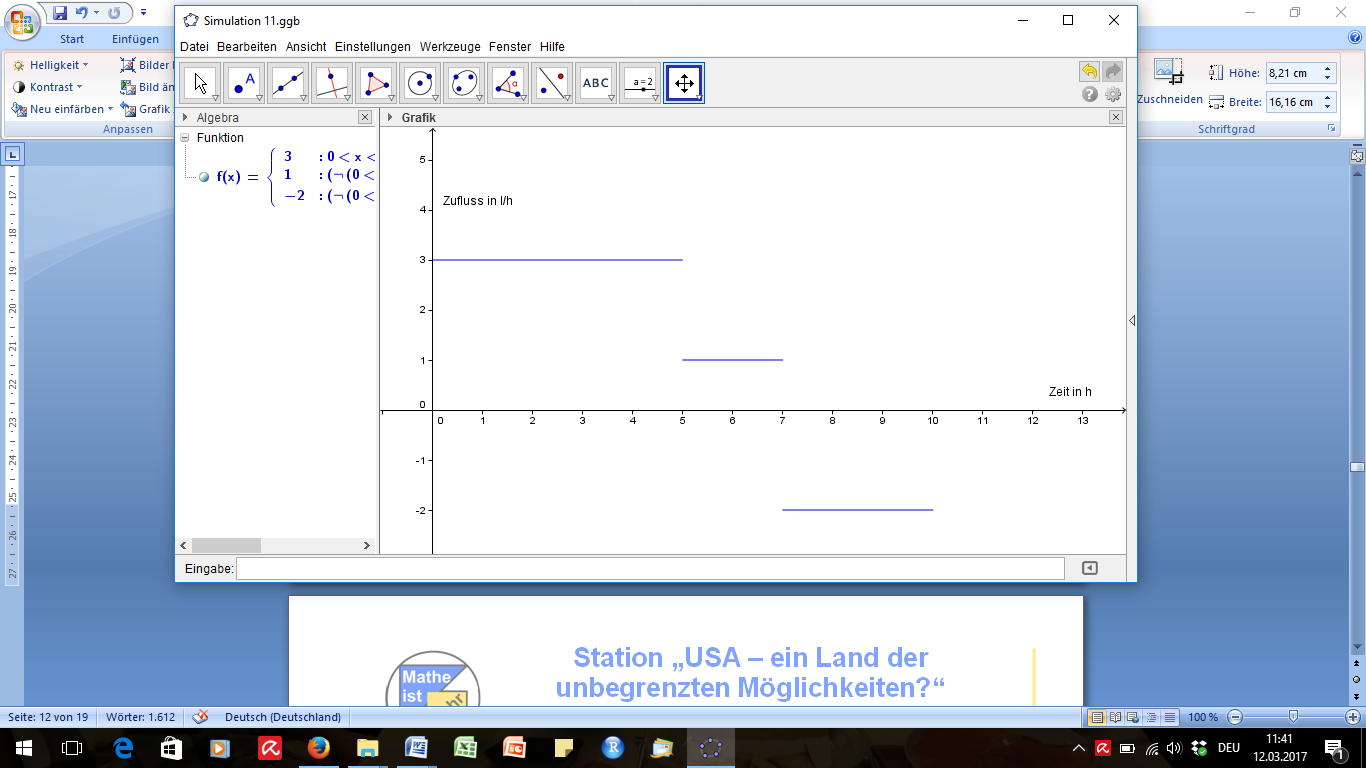
9.3. Beschreiben Sie das Vorgehen, zu einer exakten Berechnung des Flächeninhalts. Nutzen Sie dazu die in diesem Heft gelernten Inhalte.

|  |
| --- |
|  |

Nachdem Liam und Noah mit Ihrer Hilfe erfolgreich die Fläche des Landauer Zoos berechnen konnten setzen sie ihren Vortrag weiter fort.

Liam: „Bevor wir zum Höhepunkt des heutigen Vortrags kommen, möchten wir Ihnen eine weitere essentielle Erkenntnis unserer Forschung präsentieren.

9.4 Die Graphik zeigt die momentane Zuflussrate einer Badewanne. Notieren Sie eine passende Geschichte zum vorliegenden Diagramm.



|  |
| --- |
|  |

9.5 Stellen Sie die Stammfunktion auf, die angibt, wie viel Wasser sich nach einem Zeitpunkt t in der Badewanne befindet.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

9.6 Betrachten Sie das Intervall [0, 5]. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und der aufgestellten Stammfunktion verwenden Sie dazu die Integralschreibweise.

|  |
| --- |
|  |

Die beiden Landvermesser Liam und Noah präsentieren als Höhepunkt ihrer Rede das Endergebnis. Verknüpft man die beiden Informationen zu Ober- und Untersumme sowie das Badewannenmodell miteinander so erhält man den Hauptsatz der Integralrechnung. Dies sichert Ihnen die Verleihung der Ehrennadel des 2. internationalen Landvermesserkongresses.

|  |
| --- |
| **Hauptsatz der Integralrechnung Teil 2**    Die Funktion sei im Intervall stetig.  Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in I, dann gilt für und : |



10.1 Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen die Stammfunktionen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Funktion** | **Stammfunktion** |
| f(x) = 1.4 |  |
| g(x) = -0.75x + 4.55 |  |
| h(x) = -0.5 (x-3.8)2 + 0.85  = -0.5x2 + 3.8x + 8.07 |  |

10.2 Berechnen Sie die folgenden Integrale aus Aufgabe 8.4.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

**Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!**

Vergleichen Sie den Flächeninhalt (Einheit FE) von North Dakota (ND) und South Dakota (SD). Verwenden Sie dazu **Simulation 11**.

|  |
| --- |
| North Dakota (ND) |
| South Dakota (SD) |

Welcher Staat ist größer? Begründe.

|  |
| --- |
|  |

Wählen Sie weitere Bundesstaaten aus und berechnen Sie deren Flächeninhalt. Sie können hierzu die Bundesstaaten aus Aufgabe 8.5 verwenden. Nutzen Sie dazu **Simulation 11**.

|  |
| --- |
|  |

Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“  
RPTU Kaiserslautern-Landau

Institut für Mathematik  
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)  
Fortstraße 7

76829 Landau

https://mathe-labor.de

Zusammengestellt von:

Rike Daumen, Maike Erksmeyer, Nora Klotz

Betreut von:

Moritz Walz

Variante A

Veröffentlicht am:

17.03.2017